**Транспортная задача**.  
Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 16 | 30 | 17 | 10 | 16 | 4 |
| A2 | 20 | 27 | 26 | 9 | 23 | 6 |
| A3 | 13 | 4 | 22 | 3 | 1 | 10 |
| A4 | 2 | 1 | 5 | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.  
∑a = 4 + 6 + 10 + 10 = 30  
∑b = 7 + 7 + 7 + 7 + 2 = 30  
Условие баланса соблюдается. Запасы равны потребностям. Следовательно, модель транспортной задачи является закрытой.

**Этап I. Поиск первого опорного плана**.  
1. Используя *метод наименьшей стоимости*, построим первый опорный план транспортной задачи.  
Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел ai, или bj.  
Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя.  
Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.  
Искомый элемент равен c35=1. Для этого элемента запасы равны 10, потребности 2. Поскольку минимальным является 2, то вычитаем его.  
x35 = min(10,2) = 2.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 16 | 30 | 17 | 10 | x | 4 |
| 20 | 27 | 26 | 9 | x | 6 |
| 13 | 4 | 22 | 3 | **1** | **10 - 2 = 8** |
| 2 | 1 | 5 | 4 | x | 10 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | **2 - 2 = 0** |  |

Искомый элемент равен c42=1. Для этого элемента запасы равны 10, потребности 7. Поскольку минимальным является 7, то вычитаем его.  
x42 = min(10,7) = 7.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 16 | x | 17 | 10 | x | 4 |
| 20 | x | 26 | 9 | x | 6 |
| 13 | x | 22 | 3 | 1 | 8 |
| 2 | **1** | 5 | 4 | x | **10 - 7 = 3** |
| 7 | **7 - 7 = 0** | 7 | 7 | 0 |  |

Искомый элемент равен c41=2. Для этого элемента запасы равны 3, потребности 7. Поскольку минимальным является 3, то вычитаем его.  
x41 = min(3,7) = 3.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 16 | x | 17 | 10 | x | 4 |
| 20 | x | 26 | 9 | x | 6 |
| 13 | x | 22 | 3 | 1 | 8 |
| **2** | 1 | x | x | x | **3 - 3 = 0** |
| **7 - 3 = 4** | 0 | 7 | 7 | 0 |  |

Искомый элемент равен c34=3. Для этого элемента запасы равны 8, потребности 7. Поскольку минимальным является 7, то вычитаем его.  
x34 = min(8,7) = 7.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 16 | x | 17 | x | x | 4 |
| 20 | x | 26 | x | x | 6 |
| 13 | x | 22 | **3** | 1 | **8 - 7 = 1** |
| 2 | 1 | x | x | x | 0 |
| 4 | 0 | 7 | **7 - 7 = 0** | 0 |  |

Искомый элемент равен c31=13. Для этого элемента запасы равны 1, потребности 4. Поскольку минимальным является 1, то вычитаем его.  
x31 = min(1,4) = 1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 16 | x | 17 | x | x | 4 |
| 20 | x | 26 | x | x | 6 |
| **13** | x | x | 3 | 1 | **1 - 1 = 0** |
| 2 | 1 | x | x | x | 0 |
| **4 - 1 = 3** | 0 | 7 | 0 | 0 |  |

Искомый элемент равен c11=16. Для этого элемента запасы равны 4, потребности 3. Поскольку минимальным является 3, то вычитаем его.  
x11 = min(4,3) = 3.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **16** | x | 17 | x | x | **4 - 3 = 1** |
| x | x | 26 | x | x | 6 |
| 13 | x | x | 3 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | x | x | x | 0 |
| **3 - 3 = 0** | 0 | 7 | 0 | 0 |  |

Искомый элемент равен c13=17. Для этого элемента запасы равны 1, потребности 7. Поскольку минимальным является 1, то вычитаем его.  
x13 = min(1,7) = 1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 16 | x | **17** | x | x | **1 - 1 = 0** |
| x | x | 26 | x | x | 6 |
| 13 | x | x | 3 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | x | x | x | 0 |
| 0 | 0 | **7 - 1 = 6** | 0 | 0 |  |

Искомый элемент равен c23=26. Для этого элемента запасы равны 6, потребности 6. Поскольку минимальным является 6, то вычитаем его.  
x23 = min(6,6) = 6.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 16 | x | 17 | x | x | 0 |
| x | x | **26** | x | x | **6 - 6 = 0** |
| 13 | x | x | 3 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | x | x | x | 0 |
| 0 | 0 | **6 - 6 = 0** | 0 | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 16[3] | 30 | 17[1] | 10 | 16 | 4 |
| A2 | 20 | 27 | 26[6] | 9 | 23 | 6 |
| A3 | 13[1] | 4 | 22 | 3[7] | 1[2] | 10 |
| A4 | 2[3] | 1[7] | 5 | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.  
2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 8, а должно быть m + n - 1 = 8. Следовательно, опорный план является *невырожденным*.  
Значение целевой функции для этого опорного плана равно:  
F(x) = 16\*3 + 17\*1 + 26\*6 + 13\*1 + 3\*7 + 1\*2 + 2\*3 + 1\*7 = 270

**Этап II. Улучшение опорного плана**.  
Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v1 = 16; 0 + v1 = 16; v1 = 16  
u3 + v1 = 13; 16 + u3 = 13; u3 = -3  
u3 + v4 = 3; -3 + v4 = 3; v4 = 6  
u3 + v5 = 1; -3 + v5 = 1; v5 = 4  
u4 + v1 = 2; 16 + u4 = 2; u4 = -14  
u4 + v2 = 1; -14 + v2 = 1; v2 = 15  
u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17  
u2 + v3 = 26; 17 + u2 = 26; u2 = 9

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=16 | v2=15 | v3=17 | v4=6 | v5=4 |
| u1=0 | 16[3] | 30 | 17[1] | 10 | 16 |
| u2=9 | 20 | 27 | 26[6] | 9 | 23 |
| u3=-3 | 13[1] | 4 | 22 | 3[7] | 1[2] |
| u4=-14 | 2[3] | 1[7] | 5 | 4 | 24 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(2;1): 9 + 16 > 20; ∆21 = 9 + 16 - 20 = 5 > 0  
(2;4): 9 + 6 > 9; ∆24 = 9 + 6 - 9 = 6 > 0  
(3;2): -3 + 15 > 4; ∆32 = -3 + 15 - 4 = 8 > 0  
max(5,6,8) = 8  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;2): 4  
Для этого в перспективную клетку (3;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 16[3] | 30 | 17[1] | 10 | 16 | 4 |
| 2 | 20 | 27 | 26[6] | 9 | 23 | 6 |
| 3 | 13[1][-] | 4[+] | 22 | 3[7] | 1[2] | 10 |
| 4 | 2[3][+] | 1[7][-] | 5 | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Цикл приведен в таблице (3,2 → 3,1 → 4,1 → 4,2).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (3, 1) = 1. Прибавляем 1 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 1 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 16[3] | 30 | 17[1] | 10 | 16 | 4 |
| A2 | 20 | 27 | 26[6] | 9 | 23 | 6 |
| A3 | 13 | 4[1] | 22 | 3[7] | 1[2] | 10 |
| A4 | 2[4] | 1[6] | 5 | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v1 = 16; 0 + v1 = 16; v1 = 16  
u4 + v1 = 2; 16 + u4 = 2; u4 = -14  
u4 + v2 = 1; -14 + v2 = 1; v2 = 15  
u3 + v2 = 4; 15 + u3 = 4; u3 = -11  
u3 + v4 = 3; -11 + v4 = 3; v4 = 14  
u3 + v5 = 1; -11 + v5 = 1; v5 = 12  
u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17  
u2 + v3 = 26; 17 + u2 = 26; u2 = 9

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=16 | v2=15 | v3=17 | v4=14 | v5=12 |
| u1=0 | 16[3] | 30 | 17[1] | 10 | 16 |
| u2=9 | 20 | 27 | 26[6] | 9 | 23 |
| u3=-11 | 13 | 4[1] | 22 | 3[7] | 1[2] |
| u4=-14 | 2[4] | 1[6] | 5 | 4 | 24 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;4): 0 + 14 > 10; ∆14 = 0 + 14 - 10 = 4 > 0  
(2;1): 9 + 16 > 20; ∆21 = 9 + 16 - 20 = 5 > 0  
(2;4): 9 + 14 > 9; ∆24 = 9 + 14 - 9 = 14 > 0  
max(4,5,14) = 14  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (2;4): 9  
Для этого в перспективную клетку (2;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 16[3][-] | 30 | 17[1][+] | 10 | 16 | 4 |
| 2 | 20 | 27 | 26[6][-] | 9[+] | 23 | 6 |
| 3 | 13 | 4[1][+] | 22 | 3[7][-] | 1[2] | 10 |
| 4 | 2[4][+] | 1[6][-] | 5 | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Цикл приведен в таблице (2,4 → 2,3 → 1,3 → 1,1 → 4,1 → 4,2 → 3,2 → 3,4).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (1, 1) = 3. Прибавляем 3 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 3 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 16 | 30 | 17[4] | 10 | 16 | 4 |
| A2 | 20 | 27 | 26[3] | 9[3] | 23 | 6 |
| A3 | 13 | 4[4] | 22 | 3[4] | 1[2] | 10 |
| A4 | 2[7] | 1[3] | 5 | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17  
u2 + v3 = 26; 17 + u2 = 26; u2 = 9  
u2 + v4 = 9; 9 + v4 = 9; v4 = 0  
u3 + v4 = 3; 0 + u3 = 3; u3 = 3  
u3 + v2 = 4; 3 + v2 = 4; v2 = 1  
u4 + v2 = 1; 1 + u4 = 1; u4 = 0  
u4 + v1 = 2; 0 + v1 = 2; v1 = 2  
u3 + v5 = 1; 3 + v5 = 1; v5 = -2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=2 | v2=1 | v3=17 | v4=0 | v5=-2 |
| u1=0 | 16 | 30 | 17[4] | 10 | 16 |
| u2=9 | 20 | 27 | 26[3] | 9[3] | 23 |
| u3=3 | 13 | 4[4] | 22 | 3[4] | 1[2] |
| u4=0 | 2[7] | 1[3] | 5 | 4 | 24 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(4;3): 0 + 17 > 5; ∆43 = 0 + 17 - 5 = 12 > 0  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (4;3): 5  
Для этого в перспективную клетку (4;3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 16 | 30 | 17[4] | 10 | 16 | 4 |
| 2 | 20 | 27 | 26[3][-] | 9[3][+] | 23 | 6 |
| 3 | 13 | 4[4][+] | 22 | 3[4][-] | 1[2] | 10 |
| 4 | 2[7] | 1[3][-] | 5[+] | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Цикл приведен в таблице (4,3 → 4,2 → 3,2 → 3,4 → 2,4 → 2,3).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (4, 2) = 3. Прибавляем 3 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 3 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 16 | 30 | 17[4] | 10 | 16 | 4 |
| A2 | 20 | 27 | 26[0] | 9[6] | 23 | 6 |
| A3 | 13 | 4[7] | 22 | 3[1] | 1[2] | 10 |
| A4 | 2[7] | 1 | 5[3] | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17  
u2 + v3 = 26; 17 + u2 = 26; u2 = 9  
u2 + v4 = 9; 9 + v4 = 9; v4 = 0  
u3 + v4 = 3; 0 + u3 = 3; u3 = 3  
u3 + v2 = 4; 3 + v2 = 4; v2 = 1  
u3 + v5 = 1; 3 + v5 = 1; v5 = -2  
u4 + v3 = 5; 17 + u4 = 5; u4 = -12  
u4 + v1 = 2; -12 + v1 = 2; v1 = 14

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=14 | v2=1 | v3=17 | v4=0 | v5=-2 |
| u1=0 | 16 | 30 | 17[4] | 10 | 16 |
| u2=9 | 20 | 27 | 26[0] | 9[6] | 23 |
| u3=3 | 13 | 4[7] | 22 | 3[1] | 1[2] |
| u4=-12 | 2[7] | 1 | 5[3] | 4 | 24 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(2;1): 9 + 14 > 20; ∆21 = 9 + 14 - 20 = 3 > 0  
(3;1): 3 + 14 > 13; ∆31 = 3 + 14 - 13 = 4 > 0  
max(3,4) = 4  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;1): 13  
Для этого в перспективную клетку (3;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 16 | 30 | 17[4] | 10 | 16 | 4 |
| 2 | 20 | 27 | 26[0][-] | 9[6][+] | 23 | 6 |
| 3 | 13[+] | 4[7] | 22 | 3[1][-] | 1[2] | 10 |
| 4 | 2[7][-] | 1 | 5[3][+] | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Цикл приведен в таблице (3,1 → 3,4 → 2,4 → 2,3 → 4,3 → 4,1).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (2, 3) = 0. Прибавляем 0 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 0 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 16 | 30 | 17[4] | 10 | 16 | 4 |
| A2 | 20 | 27 | 26 | 9[6] | 23 | 6 |
| A3 | 13[0] | 4[7] | 22 | 3[1] | 1[2] | 10 |
| A4 | 2[7] | 1 | 5[3] | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17  
u4 + v3 = 5; 17 + u4 = 5; u4 = -12  
u4 + v1 = 2; -12 + v1 = 2; v1 = 14  
u3 + v1 = 13; 14 + u3 = 13; u3 = -1  
u3 + v2 = 4; -1 + v2 = 4; v2 = 5  
u3 + v4 = 3; -1 + v4 = 3; v4 = 4  
u2 + v4 = 9; 4 + u2 = 9; u2 = 5  
u3 + v5 = 1; -1 + v5 = 1; v5 = 2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=14 | v2=5 | v3=17 | v4=4 | v5=2 |
| u1=0 | 16 | 30 | 17[4] | 10 | 16 |
| u2=5 | 20 | 27 | 26 | 9[6] | 23 |
| u3=-1 | 13[0] | 4[7] | 22 | 3[1] | 1[2] |
| u4=-12 | 2[7] | 1 | 5[3] | 4 | 24 |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.  
Минимальные затраты составят: F(x) = 17\*4 + 9\*6 + 4\*7 + 3\*1 + 1\*2 + 2\*7 + 5\*3 = 184  
**Анализ оптимального плана**.  
Из 1-го склада необходимо весь груз направить в 3-й магазин.  
Из 2-го склада необходимо весь груз направить в 4-й магазин.  
Из 3-го склада необходимо груз направить в 2-й магазин (7 ед.), в 4-й магазин (1 ед.), в 5-й магазин (2 ед.)  
Из 4-го склада необходимо груз направить в 1-й магазин (7 ед.), в 3-й магазин (3 ед.)  
Задача имеет множество оптимальных планов, поскольку оценка для (3;1) равна 0.